ગણક્રિયાઓ

- *The essence of mathematics lies in its freedom.*
- *I see it but I don't believe it !*

– Georg Cantor

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતની તમામ શાખાઓમાં ગણની સંકલ્પના આધારભૂત છે. ગણિતશાસ્ત્રી **જ્યોર્જ કેન્ટરે** (1845-1918 A.D.) ગણ-સિદ્ધાંતોની પાયારૂપ સંકલ્પના આપી. ધોરણ 8માં આપણે ગણ વિશેની કેટલીક અગત્યની અને પ્રાથમિક વિગતોનો અભ્યાસ કરેલ છે.

રોજિંદા જીવનમાં, આપણે વારંવાર કેટલાક સમુદાય વિશે ચર્ચા કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગાયોનું ધણ, પત્તાનો ઢગલો, કોઈ ટીમના ખેલાડીઓ વગેરે **સુનિશ્ચિત વસ્તુઓનો સમુદાય 'ગણ' દર્શાવે છે.**

The father of set theory

The main inventor of set theory was the mathematician Georg Cantor. He was born on 3rd March, 1845 in St. Petesburg, Russia. He took his school education in St. Petesburg. In 1856, he moved to Germany. He was the president of **Berlin Mathematical Society** (1864-1865). He achieved doctorate degree in 1867. He taught at a girls school in Berlin. In 1872, he was promoted as an extraordinary professor in Halle. He was a friend of Dedekind. He got some very surprising results in Mathematics. In 1873, he proved that the rational numbers are countable. The birth of set theory dates to 1873, when Georg Cantor proved the uncountability of real line, actually December 7, 1873. Hilbert described Cantor's work as the finest product of mathematical genius and one of the supreme achievement of purely intellectual human activity. Some powerful people who disagreed with him severely criticized him for this. But today while those who troubled him are forgotten, Georg Cantor is remembered and widely respected. He died on 6th January, 1918 in Halle, Germany.

1.2 પુનરાવર્તનના અગત્યના મુદ્દાઓ

- **ગણ (Set) એ સુનિશ્ચિત વસ્તુઓનો સમુદાય છે.**
- **જે ગણમાં એક પણ સભ્ય ન હોય એવા ગણને ખાલીગણ (Null set) અથવા રિક્તગણ (Empty set) કહે છે.**
- **જે ગણમાં માત્ર એક જ સભ્ય હોય એવા ગણને એકાકીગણ (Singleton) કહે છે.**
- **$\in$ (માં હોવું) એ અવ્યાખ્યાયિત સંકેત છે.**
- **જો x એ ગણ Aનો સભ્ય કે ઘટક હોય તો તે પરિસ્થિતિને $x \in$ Aથી દર્શાવાય.**
- **જો x એ ગણ Aનો ઘટક ન હોય તો તે પરિસ્થિતિને $x \notin$ Aથી દર્શાવાય.**
- **જો કોઈ ગણની સભ્ય-સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક હોય તો તેને સાન્તગણ (Finite set) કહે છે અને જે ગણ સાન્ત ન હોય તેવા ગણને અનંતગણ (Infinite set) કહે છે. ખાલીગણ એ સાન્તગણ છે.**
- **જો ગણ Aનો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ Bનો પણ સભ્ય હોય તો ગણ Aને ગણ Bનો ઉપગણ (Subset) કહે છે. આ પરિસ્થિતિને સંકેતમાં $A \subset B$થી દર્શાવાય.**

ઉપગણ વિશે અગત્યના મુદ્દાઓ :

(1) ખાલીગણ એ પ્રત્યેક ગણનો ઉપગણ છે. સંકેતમાં પ્રત્યેક ગણ A માટે, $\emptyset \subset A$.

(2) પ્રત્યેક ગણ એ પોતાનો ઉપગણ છે. સંકેતમાં પ્રત્યેક ગણ A માટે $A \subset A$.

(3) જો કોઈ ગણ Aમાં n ઘટકો હોય, તો Aના ઉપગણની સંખ્યા 2^n થાય.

(4) $N \subset Z \subset Q \subset R$

- સામાન્ય રીતે, કોઈ પણ પ્રશ્નના ઉકેલના સંદર્ભમાં આપણે કોઈ એક નિશ્ચિત ગણના સભ્યો અને તે ગણના ઉપગણોનો વિચાર કરીએ છીએ. આવો નિશ્ચિત ગણ તે પ્રશ્નના સંદર્ભમાં **સાર્વત્રિક ગણ (Universal set) U** તરીકે ઓળખાય છે.

  એક પ્રશ્નના સંદર્ભમાં જે સાર્વત્રિક ગણ હોય, એ બીજા પ્રશ્નના સંદર્ભમાં સાર્વત્રિક ગણ ન પણ હોય. ઉદાહરણ તરીકે ભૂમિતિમાં અવકાશ કે સમતલ સાર્વત્રિક ગણ છે. પૂર્ણાંકોના પરસ્પર સંબંધો માટે પૂર્ણાંકોનો ગણ Z એ સાર્વત્રિક ગણ છે. સુરેખ સમીકરણોના ઉકેલ માટે વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ છે.
- **સાર્વત્રિક ગણ U માં હોય પરંતુ આપેલ ગણ Aમાં ન હોય તેવા તમામ સભ્યોના ગણને (Uના સંદર્ભમાં) Aનો પૂરકગણ કહે છે** અને તેને સંકેતમાં A' વડે દર્શાવાય છે.

  આથી $A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

  આમ, ઉપરની વ્યાખ્યા પરથી આપણને નીચેનાં પરિણામો મળે :

  (1) $A \cup A' = U$ અને (2) $A \cap A' = \emptyset$
- **જો બે ગણના ઘટકો સમાન (એકના એક જ) હોય તો તેઓ સમાન ગણ છે તેમ કહેવાય. જો ગણ Aનો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ Bનો પણ સભ્ય હોય તથા ગણ Bનો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ Aનો પણ સભ્ય હોય તો A અને B સમાન ગણ (Equal sets) છે તેમ કહેવાય. એટલે કે, $A \subset B$ અને $B \subset A$ તો $A = B$. જો A અને B સમાન ગણ હોય તો $A = B$ લખાય.**

ઉદાહરણ તરીકે, આપેલ બે ગણ $A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$ અને $B = \{1, 2, 3, 4\}$ માટે ગણ A તથા ગણ Bના ઘટકો 1, 2, 3, 4 મળે જે સમાન છે.

આથી, આપણે કહી શકીએ કે $A = B$.

- **જો ગણ Aનો પ્રત્યેક સભ્ય એ ગણ Bના એક અને માત્ર એક જ સભ્ય સાથે સંગત હોય તથા ગણ Bનો પ્રત્યેક સભ્ય ગણ Aના એક અને માત્ર એક સભ્ય સાથે સંગત હોય. તો ગણ A અને ગણ B વચ્ચે એક-એક સંગતતા (One-one correspondence) છે એમ કહેવાય અને A અને B સામ્ય ગણ (Equivalent sets) કહેવાય. A અને B સામ્ય ગણ છે તે પરિસ્થિતિને સંકેતમાં $A \sim B$થી દર્શાવાય.**
- **જો બે સાન્તગણ વચ્ચે એક-એક સંગતતા હોય, તો તે બે ગણની સભ્ય-સંખ્યા સમાન જ હોય.**
- **બે સમાન ગણ એ સામ્ય ગણ છે જ પરંતુ બે સામ્યગણ એ સમાન ગણ ન પણ હોય.**

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, તો $A \sim B$ પરંતુ $A \neq B$.

અનંતગણો માટે આવી પરિસ્થિતિ નથી.

ખરેખર તો $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ તો $N \sim E$, કારણ કે N ના પ્રત્યેક ઘટક n ને સંગત અનન્ય સંખ્યા $2n \in E$ છે તથા E ના પ્રત્યેક ઘટક m ને સંગત અનન્ય સંખ્યા $\frac{m}{2} \in N$ છે. પરંતુ $E \subset N$.

સ્વાધ્યાય

1. નીચે (a)માં આપેલ ગણને ખાલીગણ કે એકાકીગણ અને (b)માં આપેલ ગણને સમાન ગણ અથવા સામ્યગણમાં વર્ગીકૃત કરો :

(a) (1) $A = \{x \mid x \in Z, x + 1 = 0\}$

(2) $B = \{x \mid x \in N, x^2 - 1 = 0\}$

(3) $C = \{x \mid x \in N, x$ એ 13 અને 17 વચ્ચેની અવિભાજ્ય સંખ્યા$\}$

(b) (1) $A = \{x \mid x \in N, x \leq 7\}$,

$B = \{x \mid x \in Z, -3 \leq x \leq 3\}$

(2) $A = \{x \mid x \in N, x$ એ 2નો ગુણક છે, $x < 10\}$,

$B = \{x \mid x \in N, x$ એ 10થી નાની યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

2. ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ના ઉપગણોની સંખ્યા શોધો તથા ગણ Aના તમામ ઉપગણો લખો.

3. જો $A = \{x \mid x \in Z, x^2 - x = 0\}$, $B = \{x \mid x \in N, 1 \leq x \leq 4\}$, તો $A \subset B$ કહી શકાય ? શા માટે ?

4. જો $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, તો A' શોધો અને બતાવો કે $A \cup A' = U$.

5. જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 6\}$, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન થાય તેવા શક્ય તેટલા બધા જ અરિક્ત ગણ X શોધો :

(1) $X \subset A, X \not\subset B$ (2) $X \subset B, X \not\subset A$ (3) $X \subset A, X \subset B$

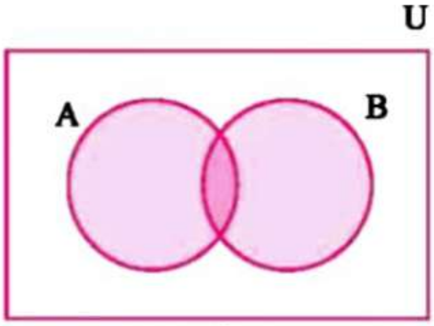
6. નીચેનાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે તપાસો :

(1) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$ (2) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

(3) $\emptyset \not\in \{\emptyset\}$ (4) $\{3\} \subset \{1, 2, \{3\}, 4\}$

*

1.3 યોગક્રિયાના ગુણધર્મો



$A \cup B$ની વેન-આકૃતિ
આકૃતિ 1.1

યોગગણ (Union set) : કોઈ બે ગણ A અને B માટે, ગણ Aમાં હોય અથવા ગણ Bમાં હોય (અથવા બંને ગણમાં હોય) તેવા તમામ સભ્યોથી બનતા ગણને A અને B નો યોગગણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં $A \cup B$ થી દર્શાવાય છે. બે ગણનો યોગગણ મેળવવાની ક્રિયાને યોગક્રિયા (Union Operation) કહે છે.

આથી, $A \cup B = \{x \mid x \in A$ અથવા $x \in B\}$.

ગણ વચ્ચેના સંબંધોની સમજ કેળવવા માટે **વેન-આકૃતિ (Venn diagram)** ઉપયોગી છે. વેન-આકૃતિ 1.1માં રંગીન પ્રદેશ $A \cup B$ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 1 : $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ગણ માટે $A \cup B$ શોધો.

ઉકેલ : $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ઉદાહરણ 2 : જો α = AHMEDABAD શબ્દના અક્ષરોનો ગણ અને β = BARODA શબ્દના અક્ષરોનો ગણ હોય, તો $\alpha \cup \beta$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\alpha = \{A, B, D, E, H, M\}$ અને

$\beta = \{A, B, D, O, R\}$

$\therefore \alpha \cup \beta = \{A, B, D, E, H, M\} \cup \{A, B, D, O, R\}$

$= \{A, B, D, E, H, M, O, R\}$

નીચેના નિયમો યોગક્રિયા સંબંધી કેટલાક નિયમો છે. આપણે ઉદાહરણ દ્વારા તેમને ચકાસીશું.

(1) દ્વિક્રિયા તરીકે યોગક્રિયા : કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે, જો $A \subset U$, $B \subset U$, તો $(A \cup B) \subset U$.

ધારો કે $U = \{x \mid x \in N, 1 \le x \le 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$

અહીં, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

આમ, $A \subset U$ અને $B \subset U$ છે જ.

હવે, $A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

સ્પષ્ટ છે કે, $A \cup B$ના તમામ સભ્યો Uમાં આવેલા છે.

તેથી, $(A \cup B) \subset U$.

આ પરિણામને ગાણિતિક ભાષામાં **યોગક્રિયા દ્વિક્ક્રિયા (Binary operation) છે** તેમ કહે છે.

(2) ક્રમનો નિયમ (Commutative law) : કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે, $A \cup B = B \cup A$.

ધારો કે $A = \{c, d, e, f\}$ અને $B = \{p, q, r, s, t\}$ કોઈ બે ગણ છે.

$\therefore \quad A \cup B = \{c, d, e, f\} \cup \{p, q, r, s, t\}$

$= \{c, d, e, f, p, q, r, s, t\}$ (i)

હવે, $B \cup A = \{p, q, r, s, t\} \cup \{c, d, e, f\}$

$= \{c, d, e, f, p, q, r, s, t\}$ (ii)

$\therefore$ (i) અને (ii) પરથી, $A \cup B$ અને $B \cup A$માં તેના તે જ સભ્યો હોવાથી,

$$A \cup B = B \cup A$$

આ નિયમને યોગક્રિયા માટે ક્રમનો નિયમ કહે છે એટલે કે યોગક્રિયા ક્રમના નિયમને અનુસરે છે.

(3) જૂથનો નિયમ (Associative law) : કોઈ પણ ત્રણ ગણ A, B અને C માટે,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

ધારો કે $A = \{x \mid x \in N, 1 \le x \le 5\}$, $B = \{x \mid x \in N, x$ એ યુગ્મ સંખ્યા છે, $x < 10\}$,

$C = \{x \mid x \in N, x$ એ 3નો ગુણક છે, $x < 10\}$ આપેલ ત્રણ ગણ છે.

અહીં, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ અને $C = \{3, 6, 9\}$ આપેલ ગણ છે.

તેથી, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$\therefore \quad (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ (i)

હવે, $B \cup C = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\}$

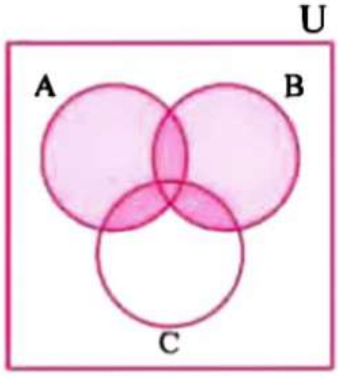
$= \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ (ii)

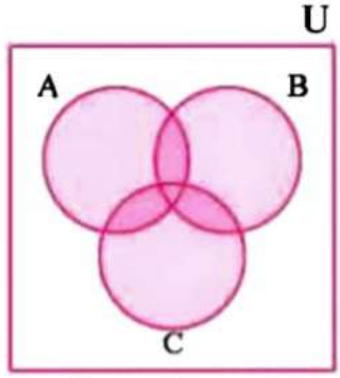
$\therefore$ પરિણામ (i) અને (ii) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, જૂથનો નિયમ સંતોષાય છે.

વેન-આકૃતિ 1.2 પરથી સ્પષ્ટ છે કે **$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$**



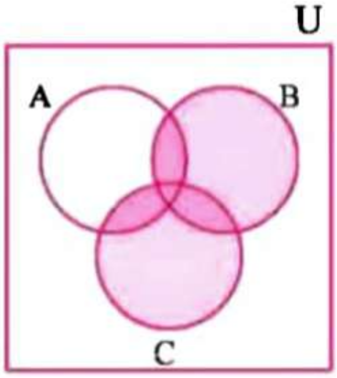
$(A \cup B)$

(i)



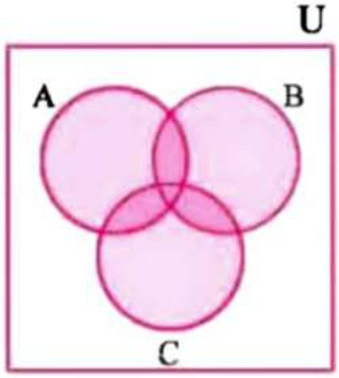
$(A \cup B) \cup C$

(ii)



$(B \cup C)$

(iii)



$A \cup (B \cup C)$

(iv)

આકૃતિ 1.2

પ્રત્યેક આકૃતિમાં રંગીન ભાગ આકૃતિ નીચે દર્શાવેલ ગણ દર્શાવે છે.

આ ક્રિયાને યોગક્રિયા માટે જૂથનો નિયમ કહે છે. એટલે કે યોગક્રિયા જૂથના નિયમને અનુસરે છે.

(4) કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે, $A \subset (A \cup B)$ અને $B \subset (A \cup B)$

ધારો કે $A = \{x \mid x \in Z, x^2 - 4 = 0\}$ અને $B = \{x \mid x \in N, x \leq 5\}$ બે આપેલ ગણ છે.

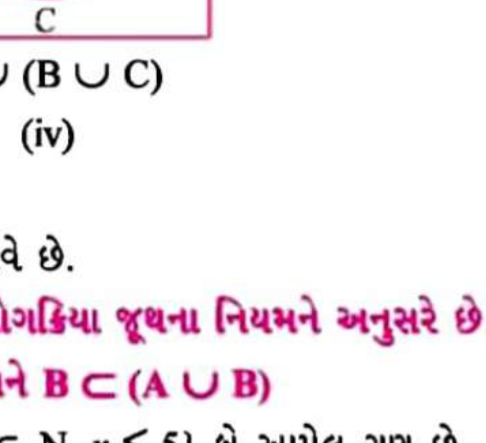
$\therefore$ અહીં, $A = \{-2, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

હવે, $A \cup B = \{-2, 2\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{-2, 1, 2, 3, 4, 5\}$

સ્પષ્ટ છે કે, $A \subset (A \cup B)$ અને $B \subset (A \cup B)$.

વેન-આકૃતિ 1.3 જુઓ. A અને B કોઈ બે ગણ છે. અહીં ગણ A એ R_1 અને R_2 પ્રદેશોનો બનેલો છે. ગણ B એ R_2 અને R_3 પ્રદેશોનો બનેલો છે. તેથી $A \cup B$ એ R_1, R_2 અને R_3 પ્રદેશોનો બનેલો છે. આમ, R_1 અને R_2 પ્રદેશો R_1, R_2 અને R_3 પ્રદેશોમાં સમાઈ ગયેલાં છે. એટલે કે ગણ A એ ગણ $A \cup B$માં સમાયેલો છે. એટલે કે $A \subset (A \cup B)$.



આકૃતિ 1.3

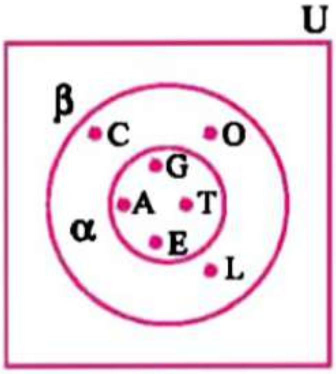
આ જ રીતે, R_2 અને R_3 પ્રદેશોનો R_1, R_2 અને R_3 પ્રદેશોમાં સમાવેશ થાય છે. એટલે કે, ગણ B એ ગણ $A \cup B$માં સમાયેલો છે. આમ, $B \subset (A \cup B)$.

આમ, વ્યાપક રીતે **કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે, $A \subset (A \cup B)$ અને $B \subset (A \cup B)$ છે.**

(5) જો $A \subset B$, તો $A \cup B = B$

ચાલો, આપણે ઉપરના ગુણધર્મને નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ :

ઉદાહરણ 3 : જો α = GATE શબ્દના અક્ષરોનો ગણ અને β = LOCGATE શબ્દના અક્ષરોનો ગણ આપેલ છે, તો આ બે અરિક્ત ગણ માટે ગુણધર્મ $\alpha \subset \beta$ તો $\alpha \cup \beta = \beta$ ચકાસો.



આકૃતિ 1.4

ઉકેલ : અહીં $\alpha = \{G, A, T, E\}$,

$\beta = \{L, O, C, G, A, T, E\}$

$\therefore$ અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ગણ αના બધા જ ઘટકો ગણ βમાં છે.

$\therefore \quad \alpha \subset \beta$

હવે, $\alpha \cup \beta = \{G, A, T, E\} \cup \{L, O, C, G, A, T, E\}$

$= \{L, O, C, G, A, T, E\}$

$\therefore \quad \alpha \cup \beta = \beta$

(6) $A \cup U = U$ અને $A \cup \emptyset = A$

ધારો કે $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ સાર્વત્રિક ગણ છે અને

$A = \{x \mid x \in N, x$ એ 10થી નાનો અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક$\}$ એ ગણ છે.

$\therefore$ અહીં $A = \{2, 3, 5, 7\}$

આથી, $A \cup U = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = U$

$A \cup \emptyset = \{2, 3, 5, 7\} \cup \emptyset$

$= \{2, 3, 5, 7\}$

$= A$

આથી આપણે કહી શકીએ કે, $A \cup U = U$ અને $A \cup \emptyset = A$.

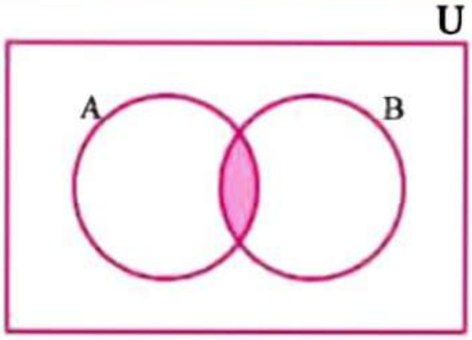
1.4 છેદક્રિયાના ગુણધર્મો

હવે છેદક્રિયાસંબંધી કેટલાક નિયમો આપણે જોઈશું અને ઉદાહરણો દ્વારા સમજીશું.

છેદગણ (Intersection Set) : કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે, ગણ A અને B બંનેમાં હોય તેવા તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને ગણ A તથા ગણ B નો છેદગણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં $A \cap B$થી દર્શાવાય છે.

આથી સંકેતમાં $A \cap B = \{x \mid x \in A$ અને $x \in B\}$

વેન આકૃતિ 1.5માં રંગીન ભાગ $A \cap B$ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 1.5

ઉદાહરણ 4 : $A = \{x \mid x \in N, x$ એ 3 નો ગુણિત છે, $x \leq 15\}$, $B = \{x \mid x \in Z, 0 < x < 10\}$ માટે $A \cap B$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $A = \{x \mid x \in N, x$ એ 3 નો ગુણિત છે, $x \leq 15\}$
$= \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$B = \{x \in Z, 0 < x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore\ A \cap B = \{3, 6, 9, 12, 15\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{3, 6, 9\}$

છેદક્રિયાના ગુણધર્મો :

હવે આપણે છેદક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો ઉદાહરણો દ્વારા ચકાસીએ.

(1) છેદક્રિયા દ્વિક્રિયા છે : કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે, જો $A \subset U$ અને $B \subset U$, તો $(A \cap B) \subset U$.

ધારો કે $U = \{x \mid x \in N, 1 \leq x \leq 25\}$, $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
$B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

અહીં $U = \{1, 2, 3, ..., 25\}$ હોવાથી, સ્પષ્ટ છે કે $A \subset U$ તથા $B \subset U$.

હવે $A \cap B = \{1, 4, 9, 16, 25\} \cap \{4, 8, 12, 16, 20\} = \{4, 16\}$

સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B$ના તમામ સભ્યો Uમાં આવેલા છે.

$\therefore\ (A \cap B) \subset U$

આથી, **છેદક્રિયા એ દ્વિક્રિયા છે.**

(2) ક્રમનો નિયમ (Commutative law) : કોઈ પણ બે ગણ A અને B માટે,

$$A \cap B = B \cap A$$

ધારો કે $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 6, 8\}$ બે ગણ છે.

$\therefore\ A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 6, 8\} = \{3, 4\}$ (i)

અને $B \cap A = \{3, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4\}$ (ii)

આથી, $A \cap B = B \cap A$ ((i) અને (ii))

આ નિયમને ગાણિતિક ભાષામાં ક્રમનો નિયમ કહે છે એટલે કે છેદક્રિયા ક્રમના નિયમને અનુસરે છે.

(3) જૂથનો નિયમ (Associative law) : કોઈ પણ ત્રણ ગણ A, B અને C માટે,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

ધારો કે $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 4, 7\}$

$\therefore\ A \cap B = \{3, 4, 5\}$

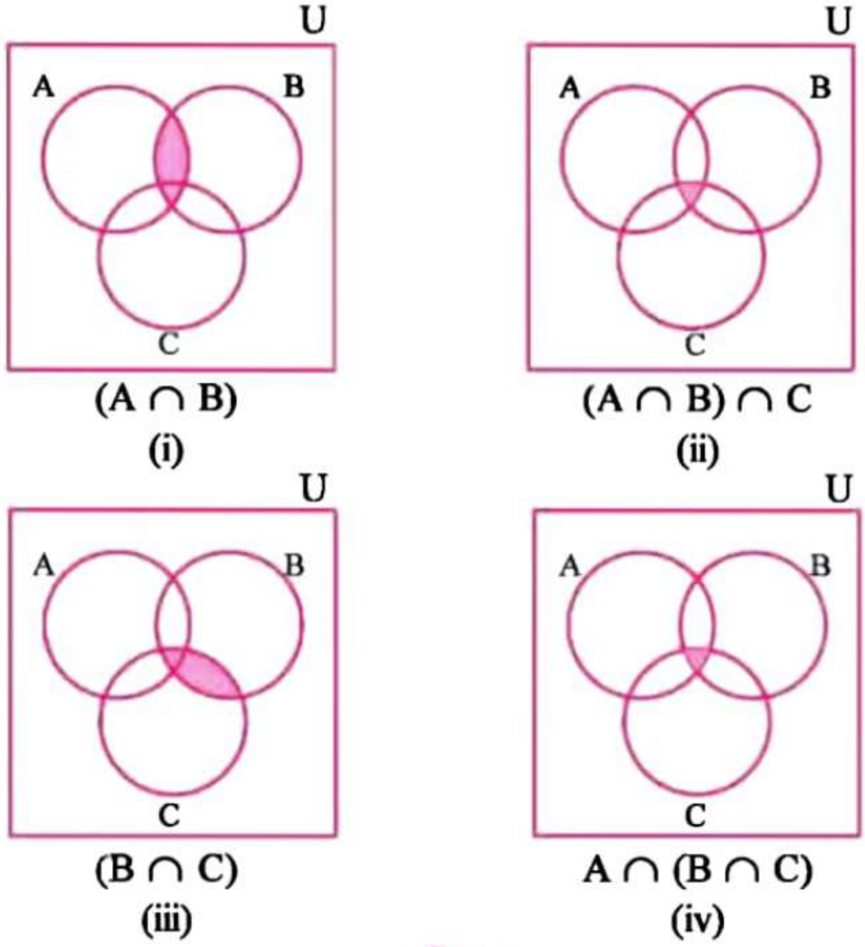
$\therefore\ (A \cap B) \cap C = \{4\}$ (i)

$B \cap C = \{4\}$

$\therefore\ A \cap (B \cap C) = \{4\}$ (ii)

આથી, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ((i) અને (ii))

ચાલો, આપણે આ નિયમને વેન-આકૃતિની મદદથી ચકાસીએ. (રંગીન ભાગ આકૃતિ નીચે દર્શાવેલ ગણ દર્શાવે છે.)



$(A \cap B)$ (i)

$(A \cap B) \cap C$ (ii)

$(B \cap C)$ (iii)

$A \cap (B \cap C)$ (iv)

આકૃતિ 1.6

વેન-આકૃતિ 1.6 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

આમ, **વ્યાપક રીતે કોઈ પણ ત્રણ ગણ A, B અને C માટે $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ આ નિયમને છેદક્રિયા માટે જૂથનો નિયમ કહે છે.**

(4) $(A \cap B) \subset A$ અને $(A \cap B) \subset B$

$A \cap B$ના બધા જ ઘટકો ગણ A અને ગણ Bમાં આવેલ છે.

આથી, $(A \cap B) \subset A$ અને $(A \cap B) \subset B$.

વેન-આકૃતિ 1.7 જુઓ. ગણ A એ R_1 અને R_2 પ્રદેશોનો બનેલો છે. ગણ B એ R_2 અને R_3 પ્રદેશોનો બનેલો છે. પ્રદેશ R_2 એ A અને B બંનેમાં સામાન્ય પ્રદેશ છે. એટલે કે, $A \cap B$ પ્રદેશ R_2નો બનેલો છે. પ્રદેશ R_2 એ Aમાં સમાયેલો હોઈ $(A \cap B) \subset A$ છે. એ જ રીતે R_2 એ Bમાં સમાયેલો હોઈ $(A \cap B) \subset B$ પણ છે.

આકૃતિ 1.7

(5) જો $A \subset B$, તો $A \cap B = A$

આ ગુણધર્મને નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા ચકાસીએ :

ઉદાહરણ 5 : આપેલ ગણ $A = \{x \mid x \in N, x^2 - 9 = 0\}$ અને $B = \{x \mid x \in N, x < 5\}$ માટે ચકાસો કે $A \subset B$ તો $A \cap B = A$

ઉકેલ : અહીં $x^2 - 9 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 3^2 = 0$

$\therefore \quad (x + 3)(x - 3) = 0$

$\therefore \quad x = -3$ અથવા $x = 3$

પરંતુ $x \in N$ હોવાથી, $x = -3$ અશક્ય છે.

$\therefore \quad x = 3$

આથી $A = \{3\}$ (i)

હવે, $B = \{x \mid x \in N, x < 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4\}$ (ii)

આથી પરિણામ (i) અને (ii) પરથી કહી શકાય કે, $A \subset B$.

હવે, $A \cap B = \{3\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3\} = A$

આથી, જો $A \subset B$, તો $A \cap B = A$

આ જ રીતે, જો $B \subset A$, તો $A \cap B = B$ મળે. (સ્વપ્રયત્ને કરો.)

(6) $A \cap \emptyset = \emptyset$ અને $A \cap U = A$

ધારો કે $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$ આપેલ ગણ છે.

સ્પષ્ટ છે કે $A \cap U = \{2, 3\} = A$ અને $A \cap \emptyset = \emptyset$

અલગ ગણ (Disjoint sets) : બે અરિક્ત ગણ A અને B, માટે $A \cap B = \emptyset$ તો બંને ગણ A અને B પરસ્પર અલગ ગણ છે તેમ કહેવાય.

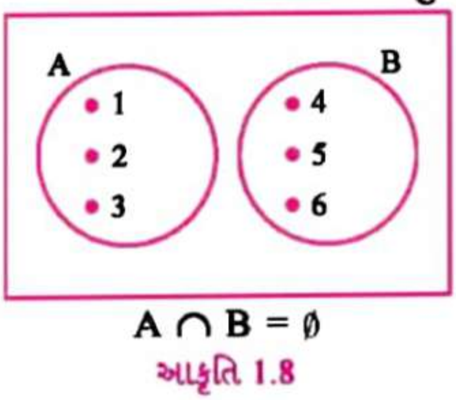
ઉદાહરણ 6 : બે ગણ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \in N, 3 < x < 7\}$ આપેલ છે. ચકાસો કે ગણ A અને ગણ B અલગ ગણ છે.

ઉકેલ : અહીં $B = \{4, 5, 6\}$

આથી, $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$

આથી, અહીં ગણ A અને ગણ Bમાં એક પણ સામાન્ય ઘટક નથી. તેથી ગણ A અને ગણ B અલગ ગણ છે.

વેન-આકૃતિ 1.8 દ્વારા ઉપરથી વ્યાખ્યાને સરળતાથી સમજી શકાય.



$A \cap B = \emptyset$

આકૃતિ 1.8

1.5 વિભાજનના નિયમો (Distributive Laws)

આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે, ગુણાકારના સરવાળા પરના વિભાજનના નિયમથી પરિચિત છીએ.

પ્રત્યેક $a, b, c \in R$ માટે $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

ઉદાહરણ તરીકે, જો $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, તો

ડા.બા. $= a \times (b + c) = 3 \times (4 + 5) = 3 \times 9 = 27$

જ.બા. $= (a \times b) + (a \times c) = (3 \times 4) + (3 \times 5) = 12 + 15 = 27$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.